DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKAB
MATEMATISK-FYSISKE MEDDELELSER, BIND XXII, NR. 13

EINLEITUNG IN DIE ALLGEMEINE KONGRUENZLEHRE

VON

JOHANNES HJELMSLEV

FÜNFTE MITTEILUNG

KØBENHAVN
I KOMMISSION HOS EJNAR MUNKSGAARD
1945

Früher veröffentlichte Mitteilungen I—IV:

Einleitung in die allgemeine Kongruenzlehre, Erste Mitteilung, D. Kgl. Danske Vidensk. Selskab, Math.-fys. Medd. VIII, 11, 1929; Zweite Mitteilung, ibd. X, 1, 1929; Dritte Mitteilung, ibd. XIX, 12, 1942; Vierte Mitteilung, ibd. XXII, 6, 1945.

Printed in Denmark.
Bianco Lunos Bogtrykkeri A/S

In dieser fünften Mitteilung kehren wir zunächst zu den in der dritten Mitteilung vorgeführten Fragen über Nachbarpunkte und Nachbargeraden zurück. Die schwachen Transporte (die singulären Bewegungen) der Ebene in sich werden näher erörtert, und für die Schmiegbüschel (d. h. Büschel von Geraden, welche durch zwei vorgegebene Nachbarpunkte, und somit durch deren zugehörige Erweiterung hindurchgehen) werden die Beziehungen zwischen dem Scheitelelemente und den Schnittelementen, welche von verschiedenen Transversalen aus dem Büschel ausgeschnitten werden, dargelegt. Auch werden Nachbargeraden ohne gemeinsame Punkte genauer untersucht und die Beziehungen der beiden Dimensionen eines Rechtecks auseinandergesetzt.

Schliesslich wird nachgewiesen (in § 8), dass die singuläre Geometrie (d. h. die Geometrie wo Rechtecke beliebiger Dimensionen existieren) mit Hilfe einer Erweiterung der Hilbertschen Streckenrechnung erledigt werden kann. Es geht hieraus hervor, dass die Hauptsätze der Euklidischen Geometrie tatsächlich von dem Eindeutigkeitsaxiom unabhängig bestehen.

---

§ 1. Schwache Transporte in der Ebene.

1. Unter einem schwachen Transport soll ein Transport verstanden werden, welcher jeden Punkt entweder in einen Nachbarpunkt überführt oder in Ruhe lässt. Im besonderen spricht man von einer schwachen Drehung um einen Punkt oder einer schwachen Schiebung längs einer Geraden. Jeder schwache Transport ist ein direkter Transport. Zwei Figuren,

welche durch einen schwachen Transport in einander übergehen können, sollen als Nachbarfiguren bezeichnet werden.

Einen Transport, welcher durch Zusammensetzung eines schwachen Transportes und einer Achsenspiegelung entsteht, bezeichnen wir als Nachbarspiegelung. Dieselbe lässt sich darstellen entweder als Produkt Aa einer Punktspiegelung A und einer Achenspiegelung a derart, dass der Punkt A Nachbarpunkt der Geraden a ist, oder als Produkt einer Achsenspiegelung x und einer schwachen Schiebung längs der Geraden x.

Zwei schwache Transporte oder zwei Nachbarspiegelungen lassen sich zu einem schwachen Transport zusammensetzen.

Ein direkter Transport, welcher zwei Fernpunkte A, B in zwei zu diesen benachbarte Punkte A_1, B_1 überführt, ist ein schwacher Transport. Er lässt sich nämlich aus zwei schwachen Transporten, nämlich einer schwachen Schiebung $A \rightarrow A_1$ und einer schwachen Drehung um A_1, zusammensetzen.

2. Ein schwacher Transport mit einem Fixpunkt A besitzt unendlich viele Fixpunkte. Der Transport lässt sich nämlich als Produkt ab zweier Achsenspiegelungen darstellen, deren Achsen a, b Schmieggeraden sind, welche beide durch den Punkt A gehen, wobei die eine von diesen sonst beliebig gewählt werden kann. Die beiden Geraden a, b haben unendlich viele Punkte mit einander gemein, und jeder von diesen Punkten ist ein Fixpunkt des vorgegebenen Transportes.

Hat ein schwacher Transport eine Fixgerade a, so besitzt er unendlich viele Fixgeraden. Der Transport lässt sich nämlich darstellen als Produkt AB zweier Punktspiegelungen, deren Zentren A, B Nachbarpunkte auf der Geraden a sind, von welchen der eine sonst beliebig gewählt werden kann. Die beiden Punkte haben unendlich viele Verbindungsgeraden, und jede von diesen ist eine Fixgerade des vorgelegten Transportes.

Wenn ein schwacher Transport weder Fixpunkte noch Fixgeraden besitzt, so lässt er sich darstellen als Produkt ab zweier Achsenspiegelungen, deren Achsen a, b Nachbargeraden sind, ohne gemeinsame Punkte oder gemeinsame Normalen. Die beiden Geraden können so bestimmt werden, dass eine beliebige von ihnen durch einen vorgegebenen Punkt hindurchgeht.

§ 2. Striche und Flecke.

3. Alle Geraden, welche durch zwei vorgegebene Nachbarpunkte A, B hindurchgelegt werden können, bilden ein Schmiegbüschel $S\ (A, B)$. Sie haben eine ganze Menge von Punkten $S\ (A, B)$ mit einander gemein, welche wir früher (Einl. III, 55) als Erweiterung der Strecke AB (oder als lineares Element, Schnittelement, Scheitelelement des Schmiegbüschels) bezeichnet haben. Aus diesem Elemente haben wir wiederum ein entsprechendes ebenes Element durch Drehung um einen beliebigen Punkt von $S\ (A, B)$ abgeleitet. Wir gehen nun daran, diese Elemente näher zu untersuchen. Der Bequemlichkeit halber wollen wir das lineare Element $S\ (A, B)$ mit dem kurzen Namen »Strich«, und das entsprechende ebene Element mit dem Namen »Fleck« bezeichnen. Die Strecke AB soll Grundstrecke der beiden Elemente heissen.

4. Für jeden direkten Transport τ, welcher die beiden Nachbarpunkte A und B stehen lässt, sind alle Punkte von $S\ (A, B)$ Fixpunkte. Der Transport lässt sich nämlich als Produkt ab zweier Spiegelungen darstellen, deren Achsen durch die Punkte A, B gehen, wobei a eine beliebig zu wählende Gerade durch diese Punkte bezeichnet. Die Geraden a, b enthalten sonach alle Punkte von $S\ (A, B)$, und infolgedessen lässt der Transport $\tau = ab$ alle Punkte von $S\ (A, B)$ in Ruhe. Umgekehrt gilt, dass jeder Punkt C einer vorgegebenen Geraden a durch A und B, welcher Fixpunkt eines jeden Transportes ist, welcher die Punkte A, B stehen lässt, dem Strich $S\ (A, B)$ angehören muss. Jeder der in Rede stehenden Transporte lässt sich nämlich durch eine Spiegelungsfolge ab ersetzen derart, dass die Gerade b durch A und sonach auch durch B und C hindurchläuft, woraus folgt, dass C dem Strich $S\ (A, B)$ angehört.

5. Jeder direkte Transport mit den Fixpunkten A, B besitzt aber unendlich viele Fixpunkte, welche dem Strich $S\ (A, B)$ nicht angehören. Beispielsweise schneiden sich wie früher gezeigt (Einl. I, S. 31 ff.) zwei Geraden durch A bezw. B, welche nicht Nachbargeraden sind, in einem neuen Fixpunkt.

In der ganzen Ebene soll nun die Menge aller Fixpunkte, welche jedem Transport mit den beiden Fixpunkten A, B angehören, mit $F\ (A, B)$ bezeichnet werden. Sie ist wie früher angedeutet mit der ebenen Erweiterung von A, B (oder von $S\ (A, B)$) identisch. Dies soll nun hier näher nachgewiesen werden.

Es sei p eine beliebige Gerade durch A. Wir können dann eine ihr entsprechende gerade Linie q durch A derart bestimmen, dass $pq = ab$ (wobei a, b dieselbe Bedeutung haben wie oben) den in Rede stehenden Transport mit den Fixpunkten A, B darstellt. Das Geradenpaar p, q wird aus a, b durch eine Drehung um A abgeleitet, wobei a in p übergeht. Es folgt hieraus, dass die Gerade p den Fleck $F\ (A, B)$ in einem Strich schneidet, welcher aus $S\ (A, B)$ durch Drehung um A entsteht. Also jede Gerade, welche durch A oder einen anderen Punkt von $F\ (A, B)$ gelegt wird, schneidet $F\ (A, B)$ in einem Strich, welcher dem Strich $S\ (A, B)$ kongruent ist. Mit anderen Worten: Der Fleck $F\ (A, B)$ wird aus dem Strich $S\ (A, B)$ durch Drehung um einen beliebigen Punkt in diesem erzeugt.

6. Ist nun g eine beliebige Gerade, welche durch die beiden Punkte A, B und infolgedessen durch alle Punkte von $S\ (A, B)$, hindurchgeht, und ist C ein Punkt von $F\ (A, B)$ ausserhalb g, ist ferner h eine Gerade, welche durch C geht und die Gerade g eindeutig in D schneidet, und ist g_1 eine neue Gerade durch A, B, dann lässt sich eine Gerade h_1 durch C so bestimmen, dass $gg_1 = hh_1$.

Hieraus folgt aber $hgg_1 = h_1$, d. h. die drei Geraden g, h, g_1 sind in Involution, und weil die beiden ersten Geraden g, h sich eindeutig in D schneiden, muss die dritte Gerade, g_1, durch D gehen, d. h. D gehört dem Strich $S\ (A, B)$ an. Es gilt also:

> Ist g eine beliebige Gerade durch die beiden Nachbarpunkte A, B, und C ein Punkt von $F\ (A, B)$ ausserhalb g, dann wird jeder Punkt, in welchem g von einer Geraden h durch C eindeutig geschnitten wird, dem Strich $S\ (A, B)$ angehören.

Im besonderen wird also der Fusspunkt der Senkrechten von C auf g dem Streich $S\ (A, B)$ angehören. Das Spiegelbild von C bezüglich g gehört sonach dem Fleck $F\ (A, B)$ an.

Es folgt dann, dass in der inneren Geometrie des Flecks $F\ (A, B)$ alle ursprünglich aufgestellten Axiome der ebenen Geometrie gültig sind, wenn wir unter

»Gerade« den Durchschnitt des Flecks mit einer ursprünglichen Geraden verstehen.

7. Drei Geraden a, b, c von welchen die beiden ersten, a, b, Schmieggeraden sind mit dem Schnittelement $S(a, b)$, bestimmen dann und nur dann einen involutorischen Transport abc, wenn die dritte Gerade c den durch $S(a, b)$ erzeugten Fleck durchschneidet.

Beweis. Es sei O ein Punkt des Schnittelements $S(a, b)$ und P sein Spiegelbild in bezug auf c. Dann muss P bei dem Transport $cbac$ fest bleiben. Ist nun $cba = abc$, also $cbac = ab$, folgt hieraus, dass P bei dem Transport ab stehen bleibt und dem von $S(a, b)$ erzeugten Fleck angehören muss. Dies gilt aber dann auch von dem Mittelpunkt M der Strecke OP, und da M auf c gelegen ist, ist hiermit bewiesen, das c den Fleck durchschneidet. Umgekehrt: Wenn c in den Fleck hineindrängt, muss das Spiegelbild P von O bezüglich c, und somit auch der Mittelpunkt M von OP, dem Fleck angehören. Infolgedessen muss M bei dem Transport abc fest liegen, d. h. dieser Transport ist eine Spiegelung.

8. Zwei Paare von Nachbarpunkten, A, B und C, D sollen ebenbürtig heissen, in Zeichen $AB \backsim CD$, wenn die entsprechenden Striche $S(A, B)$ und $S(C, D)$ einander kongruent sind.

Gehen zwei Geraden h, i, welche einander in einem Punkt C eindeutig schneiden, durch zwei Nachbarpunkte A bezw. B, dann muss mindestens eine von diesen Geraden jede Gerade g durch A und B eindeutig schneiden (Einl. III, 12). Ist z. B. der Schnittpunkt A von h und g eindeutig bestimmt, so folgt hieraus, dass A dem Flecke $F(B, C)$ und C dem Flecke $F(A, B)$ angehört, und infolgedessen sind die beiden Flecke identisch, d. h. die Striche $S(A, B)$ und $S(B, C)$ sind einander kongruent. Kurz kann dies so ausgedrückt werden:

> Wenn in einem Dreieck mit singulären Seiten zwei ordinäre Winkel vorhanden sind, dann müssen die ihnen gegenüberliegenden Seiten einander ebenbürtig sein.
>
> Sind alle drei Winkel ordinär, so müssen alle drei Seiten einander ebenbürtig sein.

9. Ein Nachbarpunktepaar A, B soll einem anderen Nachbarpunktepaar C, D unterlegen genannt werden, in Zeichen:

$AB \prec CD$, wenn $S(A, B)$ durch einen Transport in einen echten Teil von $S(C, D)$ übergeführt werden kann. Dieselbe Eigenschaft wird dadurch ausgedrückt, dass das Paar C, D dem Paar A, B überlegen genannt wird, in Zeichen $CD \succ AB$.

Dieselbe Beziehung wird dadurch ausgedrückt, dass wir $S(A, B)$ und $F(A, B)$ kleiner (oder schwächer) als $S(C, D)$ bezw. $F(C, D)$ nennen.

Lemma I. Ist $AB \succ BC$, so folgt $AC \backsim AB$. Die Dreiecksungleichheit besagt nämlich, dass

$$AB - BC \leq AC \leq AB + BC,$$

und hieraus folgt, wegen $BC < \frac{1}{2} AB$,

$$\tfrac{1}{2} AB < AC < \tfrac{3}{2} AB.$$

Lemma II. Es seien a, b, c drei Nachbargeraden, welche durch denselben Punkt gehen. Die Schnittelemente der drei Geradenpaare seien mit $S(b, c)$, $S(c, a)$, $S(a, b)$ bezeichnet. Ist dann $S(a, b) \succ S(b, c)$, so gilt $S(b, c) = S(c, a)$.

§ 3. Reziprozitätssatz.

10. Als Reziprozitätssatz bezeichnen wir den schon in Einl. III, S. 45—46 aufgestellten Satz über die reziproke Beziehung des Schnittelements und des Ordinatenelements zweier Schmieggeraden. Der Satz soll hier in verallgemeinerter Form bewiesen werden.

Die beiden Schmieggeraden a, b haben den gemeinsamen Punkt A (Fig. 1); ihre Lote in A sind n, n_1. Die Strecke AQ auf b ist ordinär; die Normale c auf b in Q schneidet a in P. Die Normale von a in P ist a_1.

Es sei nun c' eine beliebige von c verschiedene Verbindungsgerade von P, Q und c_1 die ihr in der Weise zugeordnete Gerade durch P, dass $c'c = ac_1$, also $c_1 = cc'a$. Es folgt dann

$$abc_1 = abcc'a.$$

Der letztere Transport ist aber involutorisch, weil die Geraden b, c, c' durch denselben Punkt hindurchgehen. Der obigen Gleichung zufolge ist dann die Bewegung abc_1, also auch die gleichwertige nn_1c_1, involutorisch. Da nun c_1, wegen $c'c = ac_1$, Nachbargerade von a ist, so schneidet sie die Normale n von a eindeutig in einem Punkt C; durch diesen Punkt muss dann auch n_1 hindurchgehen.

Ist umgekehrt C ein beliebiger gemeinsamer von A verschiedener Punkt der beiden Geraden n, n_1, und c_1 die Verbindungsgerade der Punkte C, P, und ist ferner c' diejenige Gerade

Fig. 1

durch P, welche durch die Gleichung $ac_1 = c'c$ bestimmt wird, so folgt wiederum, dass der Transport

$$nn_1c_1 = abc_1 = abcc'a,$$

also auch bcc' involutorisch ist, d. h. die Gerade c' geht durch den eindeutig bestimmten Schnittpunkt Q der Geraden b, c.

Es stellt sich also heraus, dass das Geradenbüschel (c'), welches das Punktepaar PQ enthält, demjenigen Strahlenbüschel $P(C)$ kongruent ist, welches das gemeinsame Element der Geraden n, n_1 vom Punkt P aus projiziert. Dieses Element ist aber dem gemeinsamen Element der Geraden a, b kongruent.

Diejenige Spiegelungsachse der Geraden a, b welche das Schnittelement der beiden Geraden enthält, sei nun mit x bezeichnet. Die Normale von P auf x schneidet dann b in einem Punkt R dergestalt, dass $AP = AR$ und $QR \prec QP$. Wenn nun eine der Punktreihe AQR kongruente Reihe PQ_1R_1 auf c abgetragen wird, so müssen die Ordinaten des Winkels (c, c') in Q_1 und R_1, wegen $Q_1R_1 \prec QP$, kongruent ausfallen. Die Ordinate in R_1 ist aber, wegen $c'c = ac_1$ und $PR_1 = RA = PA$, der Ordinate AC des Winkels (a, c_1) kongruent, und die Ordinate in Q_1 ist demnach ebenfalls der Strecke AC kongruent.

Durch eine Schiebung $P \rightarrow Q$ längs c geht Q_1 in einen Punkt U über, derart, dass $QU = AQ$, und die Ordinate des Winkels (c, c') in U ist dann wiederum der Strecke AC, oder der entsprechenden Strecke AB des Schnittelements der beiden Geraden a, b, kongruent. Es gilt also der Satz:

Dreht man das Schnittelement der Geraden n, n_1 einen rechten Winkel um Q herum, so erhält man ein Ordinatenelement des Geradenbüschels (c, c') durch P, Q.

Da nun die Schnittelemente der beiden Geradenpaare a, b und n, n_1 einander kongruent sind, ergibt sich ferner die folgende Tatsache:

Das Schnittelement σ und das Ordinatenelement ω zweier Schmieggeraden sind der Grösse nach in der Weise reziprok verbunden, dass ein anderes Paar von Schmieggeraden, dessen Schnittelement dem Element ω kongruent ist, ein Ordinatenelement besitzt, welches dem Element σ kongruent ist.

11. Was die gegenseitige Lage der Striche σ und ω anbetrifft, haben wir bei unserer obigen Untersuchung vorausgesetzt, dass die Abstände AQ und QU ordinär und einander kongruent sind. Auf die Frage nach der Entbehrlichkeit dieser Voraussetzung kehren wir später zurück. Bis auf weiteres soll die Reziprozität im obigen Sinne aufgefasst werden, und die Striche σ und ω sollen dann als reziprok bezüglich der Punkte A, Q, oder bezüglich des Abstandes AQ, bezeichnet werden.

Die entsprechenden Flecke Σ und Ω, welche durch Drehung von σ und ω um A und Q entstehen, sollen ebenfalls als reziprok bezüglich A, Q, oder bezüglich des Abstandes AQ, bezeichnet werden. Alle Geraden durch A, welche Ω durchschneiden, bilden ein Schmiegbüschel mit dem Schnittelement σ, und alle Geraden durch Q, welche Σ durchschneiden, bilden ein Büschel mit dem Schnittelement ω.

12. Ein Fleck, welcher seinem reziproken Fleck überlegen

(unterlegen) ist, soll Oberfleck (Unterfleck) genannt werden. Ist ein Fleck seinem reziproken Fleck kongruent, so bezeichnen wir ihn als Parifleck.

Wenn zwei Abstände bezw. in zwei einander reziproken Flecken enthalten sind, so gibt es immer ein Rechteck, dessen Seiten diesen Abständen kongruent sind (I, S. 18, IV, S. 10–11).

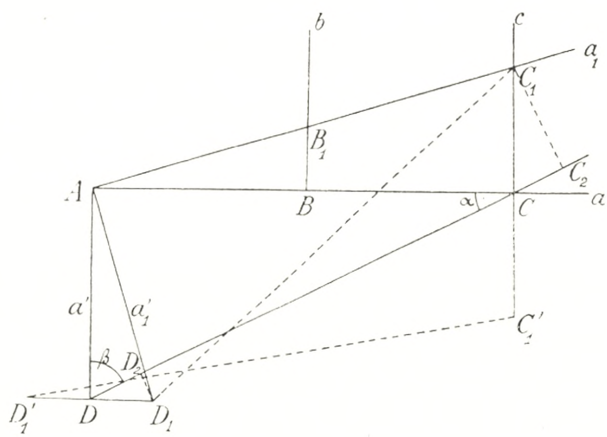

Fig. 2

Fassen wir nun eine beliebige Gerade m ins Auge, welche die Gerade b eindeutig in Q schneidet (Fig. 1). Sie schneidet a, ebenfalls eindeutig, in einem Punkt M. Das Dreieck QPM hat dann ordinäre Winkel bei P und M, und infolgedessen sind die Strecken QP und QM ebenbürtig (8). Es gilt also:

Alle Geraden, welche eine Gerade eines Schmiegbüschels in ein und demselben Punkt eindeutig schneiden, schneiden aus dem Schmiegbüschel kongruente Striche aus.

13. Wir wollen jetzt die Striche untersuchen, welche entstehen, wenn ein Schmiegbüschel mit zwei beliebigen Transversalen geschnitten wird. Wegen des vorigen Satzes können wir uns auf denjenigen Fall beschränken, wo die Transversalen auf einer Geraden des Büschels senkrecht stehen.

Es sei nun das vorgegebene Büschel durch zwei seiner Geraden a, a_1 mit dem gemeinsamen Punkt A bestimmt (Fig. 2). Auf

a errichten wir in zwei Fernpunkten B, C zu A die Senkrechten b, c, welche a_1 in B_1, C_1 schneiden. Um dann die Strecken BB_1 und CC_1 vergleichen zu können, drehen wir BB_1 einen rechten Winkel um A herum, wobei sie in die neue Lage DD_1 übergeführt wird. Wir ziehen die Geraden AD ($\perp AB$), AD_1 ($\perp AB_1$), CD und C_1D_1, welche alle eindeutig bestimmt sind. Die Winkel α, β im Dreieck ACD sind ordinär, weil die ihnen gegenüberliegenden Seiten, $AD = AB$ und AC, ordinär sind.

Es soll nun gezeigt werden, dass die Projektionen CC_2 und DD_2 der Strecken CC_1 und DD_1 auf die Gerade CD einander kongruent sind. Zu dem Zwecke betrachten wir die symmetrischen Punkte C_1', D_1' zu C_1, D_1 bezüglich C, D. Die Drehung a_1a führt C_1 in C_1' und dieselbe Drehung, $a_1' a' = a_1 a$, führt D_1 in D_1' über. Die Punktepaare $C_1'D_1'$ und C_1D_1 bestimmen sonach zwei kongruente Punktreihen mit der Mittellinie $m = CD$, und infolgedessen können sie zur Deckung gebracht werden durch die Aufeinanderfolge einer Spiegelung an m und einer Schiebung längs m, welche sowohl durch die Spiegelungsfolge CC_2 als durch DD_2 dargestellt werden kann. Hieraus geht dann hervor, dass die Punktepaare CC_2 und DD_2 einander kongruent sind.

Auf Grund dieser Tatsache gelingt es jetzt zu erweisen, dass die beiden Strecken DD_1 und CC_1, und somit auch BB_1 und CC_1, ebenbürtig sind. Da die beiden Winkel α, β ordinär sind, geht nämlich aus den rechtwinkligen Dreiecken CC_1C_2, DD_1D_2 hervor, dass $CC_1 \backsim CC_2$, und $DD_1 \backsim DD_2$, und da die Strecken CC_2, DD_2 einander kongruent sind, folgt sofort $CC_1 \backsim DD_1$, oder $BB_1 \backsim CC_1$.

Es ist hiermit erwiesen worden, dass das vorgegebene Schmiegbüschel (a, a_1) von den beiden Transversalen b, c in einander kongruenten Strichen geschnitten wird. Dem vorigen Satz zufolge haben wir dann schliesslich das folgende Resultat:

Jedes Schmiegbüschel wird von allen Transversalen in ordinärem Abstand vom Scheitelelement in kongruenten Strichen geschnitten.

Diese Striche sollen Querstriche des Büschels heissen.

Es folgt nun ferner:

Wenn zwei Elemente (Striche, Flecke) reziprok sind bezüglich irgend eines ordinären Abstandes, so sind sie reziprok bezüglich aller ordinären Abstände (Vergl. 11).

Wird ein Nachbarpunkt P einer Geraden g mit verschiedenen auf der Geraden gelegenen Fernpunkten zu ihm verbunden, so werden die Verbindungsgeraden kongruente Striche auf g ausschneiden. Die Striche sind nämlich alle reziprok zu ein und demselben Strich $S(P, Q)$, welcher durch das von P auf g gefällte Lot PQ bestimmt ist.

14. Dass man auch von Reziprozität bezüglich singulärer Abstände reden kann, ist leicht verständlich. Man erkennt unmittelbar, wie die vorstehenden Entwicklungen auf den so erweiterten Begriff Verwendung finden. Z. B. lässt sich der obenstehende Satz in folgender Weise erweitern:

Wenn zwei Elemente (Striche, Flecke) reziprok sind bezüglich irgendeines Abstandes, so sind sie reziprok bezüglich aller mit ihm ebenbürtigen Abstände.

Was nicht ebenbürtige Abstände anbetrifft, sei nur hervorgehoben, dass wenn in der Fig. 2 $AB \prec AC$ ist, so folgt, dass der Winkel α singulär ist, und hieraus ergibt sich:

$$CC_1 \succ CC_2 = DD_2 \backsim DD_1 = BB_1,$$

also

$$CC_1 \succ BB_1.$$

15. Bei einer schwachen Drehung um einen Punkt O werden die Punkte $A, B, C, \cdots$ deren Abstände von O einander ebenbürtig sind, in Nachbarpunkte $A', B', C', \cdots$ übergeführt derart, dass die Abstände $AA', BB', CC', \cdots$ einander ebenbürtig sind. Ist $OA \prec OB$, so wird $AA' \prec BB'$.

Wenn wir im folgenden von »reziproken Elementen« reden, meinen wir stets »reziprok bezüglich ordinärer Abstände«.

§ 4. Punktfremde Nachbargeraden.

16. Unter einer ordinären Transversale zweier punktfremden Nachbargeraden p, p_1 verstehen wir eine Gerade, welche p, und somit p_1, eindeutig schneidet. Die beiden Geraden werden von allen ordinären Transversalen in ebenbürtigen Punktepaaren geschnitten. Um das zu beweisen wird es genügen, zwei

Transversalen zu betrachten, welche auf p in den beiden Punkten A, B senkrecht stehen. Diese Transversalen seien von p_1 in den Punkten A_1, B_1 geschnitten (Fig. 3), und es soll dann gezeigt werden, dass die Punktepaare AA_1 und BB_1 ebenbürtig sind.

Wir nehmen eine Gerade r zu Hilfe, welche mit p, p_1 in Involution ist und durch einen Fernpunkt zu p hindurchgeht.

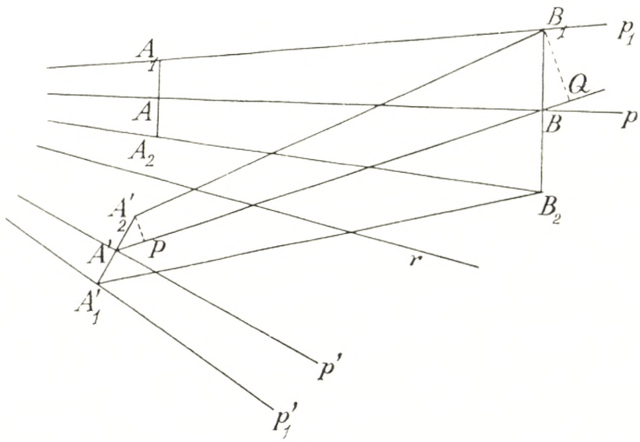

Fig. 3

Alle Punkte von r sind dann Fernpunkte zu p (und p_1). Es seien p', p'_1 die Spiegelbilder von p bezw. p_1 bezüglich r. Es folgt dann

$$p' = p^r, \quad p'_1 = p_1^r,$$

und weil p, p_1, r in Involution sind:

$$p_1 p = (p p_1)^r,$$

also

$$p_1 p = p' p'_1.$$

Der Transport rp' führt AA_1 in $A' A'_2$, und das Spiegelbild A_2 von A_1 bezüglich p in A'_1 über, wobei A'_2 das Spiegelbild von A'_1 bezüglich p' bedeutet. Das Spiegelbild von B_1 bezüglich p sei B_2.

Man zieht nun die Geraden $A'_1 B_2$, $A'B$, $A'_2 B_1$, welche alle eindeutig bestimmt sind. Da nun

$$B_2 = B_1^{p_1 p}, \quad A'_1 = (A'_2)^{p' p_1'},$$

wo die Exponenten $p_1 p$ und $p' p'_1$, wie oben gezeigt, gleichwertig sind, so ersieht man, dass die Punktepaare $A'_2 B_1$ und $A'_1 B_2$ einander kongruent sind. Da ferner die hierdurch bestimmten kongruenten Punktreihen die Mittellinie $A'B$ besitzen, so können sie zur Deckung gebracht werden durch einen Transport, welcher aus einer Spiegelung an $A'B$ und einer Schiebung längs derselben zusammengesetzt ist. Diese Schiebung lässt sich aber durch jede der beiden Spiegelungsfolgen PA' und QB darstellen, wobei P, Q die Projektionen von A'_2, B_1 auf die Mittellinie bezeichnen. Es folgt also hieraus, dass die beiden Punktepaare $A'P$ und BQ einander kongruent sind. Da nun die Gerade $A'B$ ordinäre Winkel mit p und p' bildet, so ergibt sich aus den Dreiecken $A'PA'_2$ und BQB_1, dass die Seiten $A'A'_2$ und BB_1 ebenbürtig sind, und hieraus folgt dann sofort, dass AA_1 und BB_1 ebenfalls ebenbürtig sind, w. z. b. w.

17. Bei jedem schwachen Transport, welcher durch die Aufeinanderfolge von zwei Spiegelungen an zwei Nachbargeraden ohne gemeinsame Punkte bestimmt ist, sind alle Abstände von den verschiedenen Punkten nach ihren entsprechenden Punkten einander ebenbürtig. Im besonderen gilt dies für jede schwache Schiebung. Die schwache Drehung ist im vorgehenden besprochen worden (15).

18. Zwei punktfremde Nachbargeraden p, p_1 werden von jeder Nachbargeraden, welche zwei Punkte A, B der beiden Geraden verbindet, in kongruenten Strichen geschnitten.

Zum Beweis betrachten wir die beiden Punktepaare AA_1 und BB_1, in welchen die beiden Geraden p, p_1 von zwei ordinären Transversalen, welche durch A bezw. B gehen, geschnitten werden. Der Schnittelement bei A ist zum Strich $S(B, B_1)$ reziprok bezüglich des Abstandes AB, und der Schnittelement bei B ist in gleicher Weise zum Strich $S(A, A_1)$ reziprok. Wegen $S(A, A_1) \backsim S(B, B_1)$ sind dann die beiden Schnittelemente einander kongruent.

19. Die beiden Nachbargeraden p, p_1 werden von einer ordinären Transversale in einem Punktepaare A, A_1 geschnitten. Der entsprechende Strich $S(A, A_1)$ soll ein Querstrich der Geraden heissen. Alle Querstriche der Geraden sind kongruent. Der von ihnen erfüllte ebene Bereich soll ein Streif $\sigma(p, p_1)$ heissen. Der

Streif enthält unendlich viele Geraden, die Streifgeraden, z. B. jede Gerade, welche zwei Fernpunkte der Geraden p, p_1 verbindet. Die Geraden, welche eine Streifgerade rechtwinklig schneiden, sollen als Normalen des Streifs bezeichnet werden. Die Querstriche der Geraden p, p_1 sind auch Querstriche zweier beliebigen Streifgeraden und sollen daher schlechthin als Querstriche des Streifs bezeichnet werden.

Die Streifgeraden, welche durch einen Punkt des Streifs gehen, bilden ein Schmiegbüschel, dessen Scheitelelement den Querstrichen reziprok ist.

Der Streif geht durch folgende Transporte in sich selbst über: Spiegelungen an Streifgeraden; Spiegelungen an Normalen; Spiegelungen an beliebigen Punkten des Streifs.

20. In Einl. III, 31—32 haben wir gesehen, dass in zwei Nachbargeraden sich unendlich viele Rechtecke derart einschreiben lassen, dass zwei Gegenseiten des Rechtecks auf den beiden Geraden liegen. Ferner haben wir gezeigt, dass man ein Element angeben kann (das Schiebelement der beiden Geraden), welches alle diejenigen Streckenlängen enthält, die bei Seitenpaaren eingeschriebener Rechtecke vorkommen können.

Hier wollen wir nun besonders den Fall betrachten, wo die beiden Geraden g, h eine gemeinsame Normale n besitzen. Die Schnittpunkte von n mit g, h seien mit G, H bezeichnet (vgl. Fig. 4, S. 18). Wenn dann GHH_1G_1 ein in g, h eingeschriebenes Rechteck ist, so gilt die Transformationsgleichung

$$GG_1 = HH_1.$$

Es seien ferner g_1, h_1 die Normalen zu g, h in den Punkten G_1, H_1, dann gilt:

$$GG_1 = ng_1, \quad HH_1 = nh_1,$$

also

$$ng_1 = nh_1, \quad \text{oder} \quad g_1 = h_1,$$

d. h. die beiden Geraden g, h haben ein und dieselbe Normale in den Punkten G_1, H_1. Also:

Haben zwei Nachbargeraden eine gemeinsame Normale, so haben sie unendlich viele gemeinsame Normalen. Diese schneiden auf den beiden Geraden zusammengehörige Schiebelemente aus.

21. Wie früher erwähnt (Einl. III, 33) kann das Schiebelement die ganze Gerade umfassen. Das bedeutet, dass jede Normale der einen Gerade auch Normale der anderen ist. In diesem Falle ist (wie a. a. O. gezeigt wurde) die Winkelsumme eines jeden Dreiecks höchstens um einen singulären Winkel von zwei Rechten verschieden. Ist die Winkelsumme genau zwei Rechte, soll unsere Geometrie als singulär bezeichnet werden. Ist die Winkelsumme von zwei Rechten verschieden, aber nur um einen singulären Winkel, so soll die Geometrie schwach singulär heissen. In der singulären Geometrie haben zwei beliebige Geraden mit einer gemeinsamen Normalen überhaupt dieselben Normalen. In der schwach singulären Geometrie gibt es zu jeder Geraden g ein System von Nachbargeraden, welche dieselben Normalen wie g besitzen. Diese Geraden erfüllen einen Streif, den Singularitätsstreif um g. Jede Grundstrecke des entsprechenden Querstrichs soll als Singularitätsmass bezeichnet werden.

Wenn es keine zwei Geraden gibt, welche dieselben Normalen besitzen, soll die Geometrie ordinär heissen.

§ 5. Das Rechteck.

22. Im folgenden soll nun untersucht werden, welchen Bedingungen die Seiten eines Rechtecks der Grösse nach in den verschiedenen Fällen unterworfen sind.

Zuerst betrachten wir den ordinären Fall.

Es sei wie früher GHH_1G_1 ein in g, h eingeschriebenes Rechteck, welches durch die gemeinsamen Normalen n, n_1 der beiden Geraden g, h ausgeschnitten wird (Fig. 4, S. 18). Es sei ferner auf der Geraden g ein Fernpunkt P zu G gewählt. Wenn wir dann auf g einen solchen Punkt P_1 bestimmen, dass

$$PP_1 = GG_1 = HH_1,$$

so folgt

$$PHH_1 = P_1,$$

und hieraus schliessen wir, dass H_1 und P_1 auf der eindeutig bestimmten geraden Linie HP liegen müssen. Aus der Figur ergibt sich sodann, dass die Strecke PP_1, und somit auch die

Strecke GG_1, dem reziproken Elemente zu $S(G, H)$ angehören muss. Es gilt also der Satz:

In der ordinären Geometrie existiert dann und nur dann ein Rechteck mit vorgegebenen Seitenlängen, wenn die eine von diesen dem reziproken Elemente der anderen angehört.

Aus diesem Satze schliessen wir sofort die folgenden Tatsachen:

In der ordinären Geometrie gilt, dass die Geometrie eines Unter- oder Pariflecks immer singulär ist, während die Geometrie eines Oberflecks schwach singulär ausfällt.

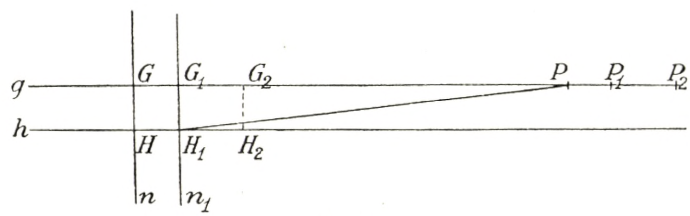

Fig. 4.

23. In der singulären Geometrie können alle Grössen der Seiten des Rechtecks angenommen werden. Wir haben deshalb nur noch die schwach singuläre Geometrie zu betrachten. Zu dem Zwecke kehren wir zur Figur 4 zurück. Es sei dann GHH_2G_2 ein in g, h eingeschriebenes Rechteck. Wir setzen

$$PP_2 = GG_2 = HH_2,$$

woraus

$$PHH_2 = P_2.$$

In dem vorliegenden Falle, wo die Geometrie schwach singulär ist, lässt sich aber nicht mehr schliessen, dass H_2 auf der Geraden PH liegt, sondern nur, dass der Abstand von H_2 nach PH dem Singularitätsmass unterlegen oder ebenbürtig ist. Hieraus ergibt sich aber sofort für die schwach singuläre Geometrie das folgende Resultat:

Um auf der Seite HH_2 ein Rechteck zu konstruieren, errichtet man das Singularitätsmass H_2H' senkrecht auf h in H_2. Eine Gerade durch H und H' bestimmt dann mit h zusammen ein Schmiegbüschel, dessen Querstrich alle in Betracht kommenden Seitengrössen GH enthält.

24. Zwei Elemente (Striche, Flecke) sollen komplementär heissen, wenn ihre Grundstrecken zwei anstossenden Seiten eines Rechtecks kongruent sind. Die Grundstrecken selbst sollen dann ebenfalls komplementär genannt werden. In der ordinären Geometrie gilt, dass zwei reziproke Elemente stets komplementär sind, und umgekehrt. In der schwach singulären Geometrie hingegen kommt dem vorhergehenden Satz zufolge ein Unterschied zwischen den beiden Begriffen zum Vorschein: reziproke Elemente sind komplementär, aber komplementäre Elemente nicht notwendig reziprok. In der singulären Geometrie schliesslich sind alle Elemente komplementär, und diese Geometrie soll daher in der Folge ausser Betracht gelassen werden.

Aus der in 23 angegebenen Konstruktion soll jetzt eine wichtige allgemeine Beziehung komplementärer Elemente abgeleitet werden. Es seien a, b zwei vorgegebene Schmieggeraden durch den Punkt O. In zwei Punkten P, Q von a seien Lote p, q auf a errichtet, welche b in P_1, Q_1 schneiden. Es gilt dann:

Wenn PP_1 zu OQ komplementär ist, so wird QQ_1 zu OP komplementär.

In dem Spezialfalle einer schwach singulären Geometrie, wo OQ ordinär, PP_1 Singularitätsstrich, ist der Satz in 23 enthalten, und der allgemeine Satz lässt sich auf diesen Spezialfall zurückführen. Man braucht nämlich nur die Figur in der Geometrie eines Flecks mit der Grundstrecke OQ zu deuten.

Der Satz gibt uns die Mittel in die Hand, aus zwei vorgegebenen komplementären Strecken m, μ die komplementäre Strecke μ_1 zu einer vorgegebenen Strecke m_1 zu konstruieren. Man trägt $OQ = m$, $OP = m_1$ ab, errichtet in P das Lot $PP_1 = \mu$, und zieht eine Gerade OP_1, wodurch die gesuchte Strecke $QQ_1 = \mu_1$ abgeschnitten wird.

In der ordinären Geometrie lassen sich auf diese Weise alle Paare reziproker Grundstrecken aus den Grundstrecken eines Maximal- und eines Minimalflecks ableiten.

§ 6. Der Kreis.

25. Es seien a, b zwei Schmieggeraden (Fig. 5) mit dem gemeinsamen Punkt O und dem Schnittelement $S(a, b)$. Im Punkte A von a ausserhalb $S(a, b)$ errichten wir das Lot p auf a. Sein Schnittpunkt mit b sei B. Die schwache Drehung ab wird dann die Gerade p in eine andere Gerade q überführen, welche durch B hindurchgeht. Auf p wählen wir einen Punkt P derart, dass

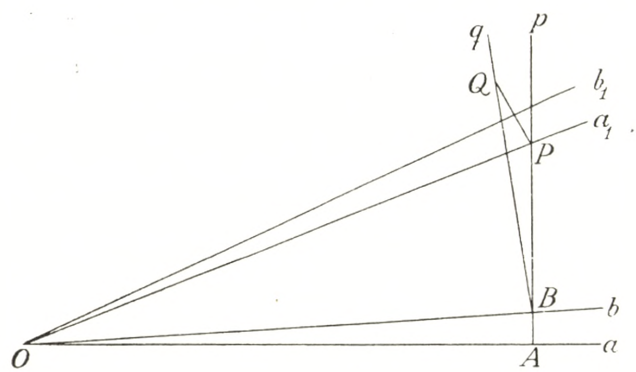

Fig. 5.

$AP \backsim OA$. Dieser Punkt geht bei der Drehung ab in einen solchen Punkt Q auf q über, dass

$$Q = P^{ab} = P^{a_1 b_1} = P^{b_1},$$

wobei a_1 die Gerade OP bezeichnet und b_1 dadurch bestimmt ist, dass $a_1 b_1 = ab$.

Es folgt nun hieraus, dass die beiden Büschel (p, q) und (a_1, b_1) den gemeinsamen Querstrich $S(P, Q)$ bezüglich der beiden einander ebenbürtigen Abstände AP und OP haben. Wegen $a_1 b_1 = ab$ hat das Büschel (a, b) gerade denselben Querstrich. Es folgt dann schliesslich, dass die Büschel (p, q) und (a, b) einander kongruente Schnittelemente haben. Auf diese Weise gelangen wir zu folgenden Tatsachen:

> Eine schwache Drehung führt jede Gerade in eine entsprechende Schmieggerade über. Alle Schnittelemente einander entsprechender Geraden sind einander kongruent.

26. Um die Elemente eines Kreises untersuchen zu können, erinnern wir zunächst an den folgenden Satz (Einl. III, 40,1°):

In einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit einem singulären Winkel A, dessen Scheitelelement grösser als die gegenüberliegende Kathete BC ist, ist die Hypotenuse AB gleich der anderen Kathete AC. Es folgt hieraus unmittelbar:

Die Tangente in einem Punkte P eines Kreises mit Zentrum O enthält auf dem Kreis alle Nachbarpunkte Q von P, welche der Bedingung genügen, dass das Element PQ dem gemeinsamen Element der beiden Radien OP und OQ unterlegen oder ebenbürtig ist.

Das gemeinsame Element des Kreises und seiner Tangente soll Tangentenelement des Kreises heissen. Es folgt:

Das Tangentenelement eines Kreises mit ordinärem Radius ist ein Parielement oder jedenfalls allen linearen Unterelementen überlegen.

Aus dem Satze in 25 folgern wir:

Die Tangenten in zwei Nachbarpunkten P, Q eines Kreises sind Schmieggeraden. Ihr Schnittelement ist dem Schnittelement der beiden Radien OP, OQ kongruent.

Mit Hilfe des obigen Satzes von dem Tangentenelement ergibt sich dann:

Das Schnittelement der Tangenten in zwei Nachbarpunkten P, Q eines Kreises ist zum Element $S(P, Q)$ bezüglich dem Radius reziprok.

27. Indem wir noch an den Satz 40,2° in Einl. III erinnern, formulieren wir schliesslich den folgenden Satz:

In einem Dreieck mit ordinären Seiten, wo eine Höhe einem Unter- oder Parielement angehört, ist die grösste Seite gleich der Summe der beiden anderen Seiten.

Aus 26 folgt unmittelbar:

Zwei Kreise mit ausschliessender Berührung und ordinären Radien haben ein lineares Element gemein, welches alle Unterelemente umfassen.

Für zwei Kreise mit einschliessender Berührung und ordinären Radien gilt dasselbe. In diesem Falle muss man aber beachten, dass wenn die Zentrale die Grundstrecke eines Unterelements ist, die Kreise dann ein grösseres (nicht lineares)

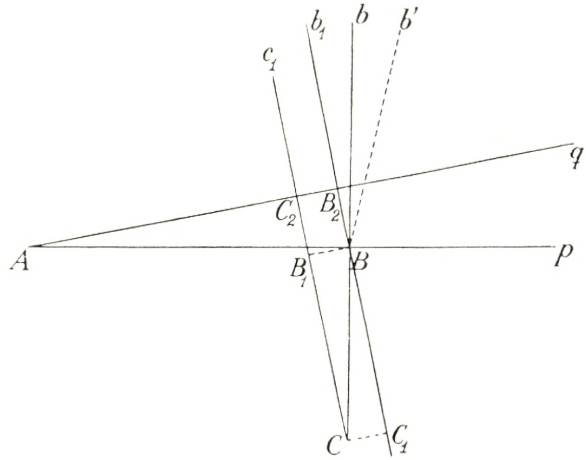

Fig. 6.

Element gemein haben, welches von demjenigen Schmiegbüschel ausgeschnitten wird, dessen Scheitelelement jenes Unterelement ist.

28. Als weiteres Hilfsmittel gehen wir nun daran, einige Sätze über die gegenseitige Lage der von einem Punkt gefällten Lote auf zwei vorgegebene Nachbargeraden aufzustellen.

Es seien zunächst p, q zwei Schmieggeraden mit dem gemeinsamen Punkt A (Fig 6). Durch den Punkt B auf p ziehen wir die Normalen b, b_1 zu p, q. Es lässt sich dann beweisen, dass die beiden Winkel (b, b_1) und (p, q) einander ebenbürtig sind, d. h. ihre Scheitelelemente sind kongruent. Bei der schwachen Drehung qp wird nämlich b_1 in das Spiegelbild b' von b_1 bezüglich b übergeführt, und einem vorhergehenden Satz zufolge gilt dann

$$(b', b_1) \backsim (p, q),$$

und da ferner

$$(b', b_1) \backsim (b, b_1)$$

so folgt

$$(b, b_1) \backsim (p, q), \text{ w. z. b. w.}$$

29. Es sei nun C ein beliebiger Punkt auf b, zunächst ein Fernpunkt von B. Die Senkrechten b_1 und c_1 von B und C auf q haben die Fusspunkte B_2, C_2, und die Senkrechten von B auf c_1, von C auf b_1, die Fusspunkte B_1, C_1. Es gilt dann $BB_1 \backsim CC_1$, und hieraus folgt

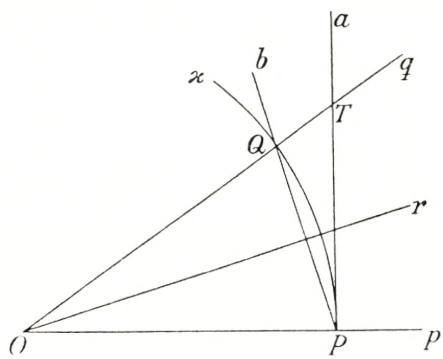

Fig. 7.

$$(b, c_1) \backsim (b, b_1)$$

also

$$(b, c_1) \backsim (p, q).$$

In ähnlicher Weise können wir nun den Punkt C mit einem auf b gelegenen Nachbarpunkt D von B vergleichen, und es gilt also:

Die von einem beliebigen Punkt der Ebene gefällten Normalen zu zwei vorgegeben Schmieggeraden p, q besitzen immer ein Schnittelement, welches dem Schnittelement von p, q kongruent ist.

30. Aus 26 geht hervor, dass jedes Element, welches aus einem Kreis $\varkappa$ mit Zentrum O, Radius OP, von einem Unter- oder Parifleck der Ebene um P ausgeschnitten wird, ein lineares Element ist, und mit dem Tangentenelement in P zusammenfällt. Wir wollen jetzt die Kreiselemente untersuchen, welche von Oberflecken um P aus dem Kreis ausgeschnitten werden. Zu dem Zwecke wählen wir daher (Fig. 7) auf p ein Unterelement

ε um O als Scheitelelement eines Büschels (p, q). Die Gerade q schneidet den Kreis in dem zu P benachbarten Punkt Q und die Tangente a in dem Punkte T. Der zu ε reziproke Oberfleck um P schneidet aus $\varkappa$ ein Kreiselement (P, Q) und aus der Tangente a ein lineares Element (P, T) heraus. Der Kreisbogen PQ wird durch die »Tangentenstrecke« PT und durch die »Querstrecke« TQ bestimmt, und TQ ist zum Scheitelelement des Büschels (a, b) bezüglich PT reziprok (wobei b die Verbindungsgerade von P, Q bedeutet). Ist nun r die Spiegelungsachse der beiden Radien OP und OQ, so folgt nach dem vorhergehenden Satz: $(a, b) \backsim (p, r)$, und da $(p, r) \backsim (p, q)$,

$$(a, b) \backsim (p, q).$$

Es lassen sich diese Tatsachen in folgenden Sätzen zusammenfassen:

Das von einem Oberfleck ausgeschnittene Element eines Kreises wird aus jedem seiner Punkte sowie aus dem Zentrum des Kreises durch kongruente Schmiegbüschel projiziert.

Hat ein rechtwinkliges Dreieck OPT einen singulären Winkel bei O, dessen Scheitelelement σ der gegenüberliegenden Kathete PT unterlegen ist, so ist die Hypotenuse OT grösser als die andere Kathete OP. Trägt man die Differenz $OT - OP$ als Kathete TS eines rechtwinkligen Dreiecks PTS ab, so wird das Scheitelelement des singulären Winkels TPS dem Scheitelelement σ kongruent.

§ 7. **Schwache Transporte ohne Fixpunkte.**

31. Ein schwacher Transport ohne Fixpunkte lässt sich immer darstellen als Produkt pq zweier Achsenspiegelungen, deren Achsen p, q ohne gemeinsame Punkte sind. Es gibt dann zwei Hauptfälle je nachdem die beiden Geraden p, q eine gemeinsame Normale haben oder keine solche Normale vorhanden ist. Die beiden Fälle sollen jetzt nacheinander betrachtet werden.

Im ersten Falle, wo p, q eine gemeinsame Normale n besitzen, ist der Transport pq eine Schiebung längs n. Diese Schiebung lässt sich auch darstellen als Produkt AB zweier Punktspiegelungen, deren Zentren A, B in den Schnittpunkten von p, q mit n liegen. Wir wissen schon (20), dass die Geraden p, q ausser n unendlich viele gemeinsame Normalen haben. Jede solche Normale n_1 ist eine Fixgerade des Transportes pq, und jede Verbindungsgerade der Schnittpunkte A_1, B_1 von n_1 mit p, q ist ebenfalls eine Fixgerade. Hiermit ist aber die Menge der Fixgeraden völlig erschöpft. Jede Fixgerade g soll nämlich dasselbe Spiegelbild g_1 bezüglich p und q haben, d. h. g und g_1 müssen p, q in ein und demselben Punktepaar schneiden, welches von einer gemein samen Normalen zu p, q ausgeschnitten wird.

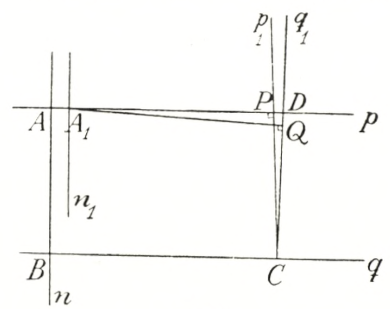

Fig. 8.

Die ganze Menge der Fixgeraden wird durch jede beliebige Schiebung längs n in dieselbe Menge übergeführt.

Indem wir nun fortan den Fall ausschliessen, wo die Geraden p, q dasselbe System von Normalen besitzen, wählen wir auf q einen solchen Punkt C, dass der Abstand BC ordinär ist. Die durch ihn gehenden Normalen p_1, q_1 zu p, q sind dann von einander verschieden. Sie werden von p in P und D geschnitten. Durch A fällen wir die Gerade AQ senkrecht auf q_1. Diese Gerade und p sind einander benachbart. Einer ihrer von A verschiedenen gemeinsamen Punkte sei A_1, und die Normale zu p in diesem Punkt sei n_1 (Fig. 8). Die Bewegung AA_1q_1 ist dann involutorisch und wegen $AA_1 = nn_1$ ist die Bewegung nn_1q_1 ebenfalls involutorisch, woraus folgt, dass $n_1 \perp q$. Ist umgekehrt n_1 eine zu n benachbarte gemeinsame Normale zu p, q, und A_1 ihr Schnittpunkt mit p, so folgt, dass $nn_1q_1 = AA_1q_1$ eine involutorische Bewegung darstellt, und hieraus ersieht man, dass eine Gerade senkrecht zu q_1 durch A, A_1 gelegt werden kann. Das Schnittelement $S(p, AQ)$ ist demnach mit dem Schiebelement $\sigma\ (p, q)$ von p und q identisch. Da ferner die Schnittelemente $S(p, AQ)$ und $S(p_1, q_1)$ kongruent sind (28), haben wir hierdurch dargelegt, dass das Schnittelement $S(p_1, q_1)$ dem Schiebelement $\sigma\ (p, q)$ ebenbürtig ist.

Die Untersuchung lässt sich hiernach ähnlich wie früher so erweitern, dass man auch Punkte C ausserhalb q in Betracht nehmen kann. Wir können daher den folgenden Satz aufstellen:

Es seien p, q zwei vorgegebene Nachbargeraden mit einer gemeinsamen Normalen n. Es seien ferner p_1, q_1 zwei verschiedene Normalen zu p, q, welche einen Punkt in ordinärem Abstand von n gemein haben. Dann ist das Schnittelement $S(p_1, q_1)$ dem Schiebelement $\sigma(p, q)$ kongruent.

32. Der Ort der Spiegelbilder von C bezüglich aller Normalen von n ist eine sogenannte Abstandskurve mit der Grundlinie n. Die Tangente dieser Kurve in C ist q_1, und wenn $AB \prec \sigma(p, q)$ vorausgesetzt wird, enthält die Tangente ein Element der Kurve, welches dem Schiebelement $\sigma(p, q)$ kongruent ist. Hiernach ersieht man sofort, dass für die Abstandskurve ganz ähnliche Sätze wie für den Kreis gelten. Nur der einfachste soll hier formuliert werden:

Jeder Unterfleck um einen Punkt einer ordinären Abstandskurve schneidet aus dieser Kurve ein lineares Element heraus, welches allen Tangenten des Kurvenelements angehören.

Wir fügen noch hinzu, dass diese Tangenten ein noch grösseres Element gemein haben, welches reziprok zum obengenannten ist, aber dieses Element ragt über die Kurve hinaus.

33. Wir haben noch den zweiten Fall zu behandeln, wo die beiden Geraden p, q keine gemeinsamen Punkte und keine gemeinsamen Normalen aufweisen. Der Transport pq hat in diesem Falle weder Fixpunkte noch Fixgeraden. Eine Hauptaufgabe wird es dann, das Schnittelement $S(p_1, q_1)$ von zwei durch einen vorgegebenen Punkt C gehenden Normalen $p_1 \perp p$, $q_1 \perp q$, zu untersuchen.

Durch einen Punkt A der Geraden p legen wir zwei Geraden $n \perp q$, $r \perp n$. Der Schnittpunkt von n, q sei B. Durch einen Punkt C auf q, dessen Abstand von B ordinär ist, ziehen wir drei Geraden: $p_1 \perp p$, $q_1 \perp q$, $r_1 \perp r$, und wir fassen sodann die drei Schnittelemente $S(p_1, q_1)$, $S(p_1, r_1)$, $S(q_1, r_1)$ ins Auge. Von den beiden letzten bemerken wir sofort, dass $S(p_1, r_1) = S(p, r)$ (29), und $S(q_1, r_1) =$ dem Schiebelement $\sigma(q, r)$ der Geraden q, r (31). Wir prüfen zunächst die beiden

Möglichkeiten $S(p_1, r_1) \succ\prec S(q_1, r_1)$. Ist $S(p_1, r_1) \succ S(q_1, r_1)$, so ergibt sich dem Lemma II, S. 8 zufolge, dass $S(p_1, q_1) = S(q_1, r_1)$, also gilt:

W e n n a u f d e r G e r a d e n p e i n P u n k t A e x i s t i e r t, w o $S(p, r) \succ \sigma(q, r)$, s o w i r d f ü r j e d e n P u n k t C a u f q, d e s s e n A b s t a n d v o n A o r d i n ä r i s t: $S(p_1, q_1) = \sigma(q, r)$. A l l e d e n v e r s c h i e d e n e n P u n k t e n C e n t s p r e c h e n d e n $S(p_1, q_1)$ s i n d e i n a n d e r k o n g r u e n t.

Die andere Möglichkeit $S(p_1, r_1) \prec S(q_1, r_1)$, oder $S(p, r) \prec \sigma(q, r)$, zeigt sich bei näherer Untersuchung überhaupt nicht in Betracht zu kommen. Das Schnittelement $S(AC, r)$ ist nämlich dem Schiebelement $\sigma(q, r)$ kongruent (13, Schluss), und wenn dann $S(p, r) \prec \sigma(q, r)$ wäre, würde das zur Folge haben, dass die Gerade p in das Dreieck ABC oder in das zu ihm bezüglich n symmetrische Dreieck hineindringen müsste, d. h. p und q müssten einander schneiden, was unserer Voraussetzung widerstreitet.

Es bleibt uns nur noch übrig, den Fall zu untersuchen, wo kein solcher Punkt A auf p vorhanden ist, dass $S(p, r)$ und $\sigma(q, r)$ von einander verschieden sind, d. h. für jeden Punkt A auf p sind die beiden Elemente $S(p, r)$ und $\sigma(q, r)$ einander kongruent.

Es sei nun D der Schnittpunkt von p, q_1, und p_2 das Lot auf p in D, r_2 das Lot von q_1 in D. Dann gilt:

$$S(p_1, q_1) = S(p_2, q_1) = S(p, r_2).$$

Hieraus folgt, dass $S(p_1, q_1)$ dem Schiebelement $\sigma(q, r_2)$ kongruent und infolgedessen zum Strich $S(C, D)$ reziprok ist. Da ferner $S(C, D)$ mit dem Querstrich des Geradenpaares p, q gleichbedeutend ist, so folgt, dass a l l e $S(p_1, q_1)$ z u m Q u e r - s t r i c h r e z i p r o k s i n d.

34. Bisher haben wir stets vorausgesetzt, dass der Punkt C, von welchem die beiden Normalen p_1, q_1 ausgehen, auf der Geraden q gelegen ist. Nachher lässt sich aber ganz wie früher (29) zeigen, dass diese Voraussetzung ohne Belang ist. Unsere Resultate bleiben dann für jeden Punkt C gültig, im ersten Falle mit Ausnahme der Punkte eines Streifs um n mit dem Querstrich $\sigma(q, r)$.

35. Der Transport qp führt die Gerade q_1 in eine Gerade q'_1 über, welche das Spiegelbild von q_1 bezüglich p_2 ist. Infolgedessen gilt:

$$S(q_1, q'_1) = S(q_1, p_2) = S(p_1, q_1).$$

Versteht man unter einem offenen Kreis den Ort der Spiegelbilder eines festen Punktes bezüglich der Geraden eines Idealbüschels, so lassen sich nunmehr leicht ähnliche Sätze für offene Kreise wie früher für gewöhnliche Kreise aufstellen. Für den Spezialfall einer Abstandskurve ist dies schon erledigt worden (32).

§ 8. **Die singuläre Geometrie.**

36. Wenn in unserer Ebene ein Viereck mit ordinären Seiten und lauter rechten Winkeln existiert, so ist die Geometrie singulär. Die Winkelsumme des Dreiecks beträgt stets zwei Rechte. Zwei Geraden, welche eine gemeinsame Normale und somit überhaupt dasselbe System von Normalen besitzen, sollen parallel heissen. Parallele Geraden werden von jeder gemeinsamen Transversalen unter kongruenten gleichliegenden Winkeln geschnitten.

Es seien a, b zwei parallele Ferngeraden und s eine Gerade, welche a in einem Punkt A unter einem ordinären spitzen, dem rechten Winkel ebenbürtigen Winkel α (d. h. $\alpha > \frac{R}{2^n}$, wo n eine ganze Zahl bedeutet) schneidet, dann muss s auch b schneiden, und zwar unter dem gleichen Winkel α. Dies folgt aus einer sehr bekannten Schlussweise bei Legendre: Wir fällen das Lot AB auf b, tragen die Strecke $AB_1 = AB$ auf b ab, sodann die Strecke $B_1B_2 = AB_1$ in der Verlängerung von AB_1, ferner $B_2B_3 = AB_2$ in der Verlängerung von AB_2, u. s. w. und gelangen auf diese Weise schliesslich an der Geraden s vorbei, weil der spitze Winkel zwischen AB_i und $a = \frac{R}{2^i}$, also schliesslich $< \alpha$ wird.

37. Im folgenden soll nunmehr gezeigt werden, wie sich die von Hilbert in der Euklidischen Geometrie definierte Streckenrechnung für unsere Zwecke verallgemeinern lässt.

Zunächst wählen wir eine beliebige ordinäre Strecke e als Einheitsstrecke, und als vorläufiges Arbeitsgebiet betrachten wir den entsprechenden Eudoxischen Bereich $E(e)$. Dieser Bereich ist entweder als echter Teil in der vorgegebenen Ebene enthalten, oder er ist mit dieser identisch, und wenn wir unter »Gerade« in $E(e)$ den Durchschnitt des Bereichs mit einer ursprünglichen Geraden verstehen, so sind alle ursprünglich aufgestellten Axiome der ebenen Geometrie in $E(e)$ gültig.

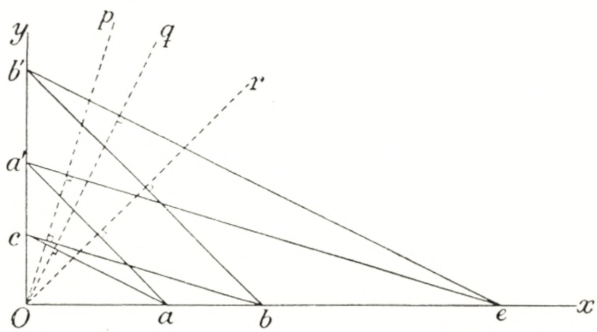

Fig. 9.

Die Summe zweier Strecken wird in gewöhnlicher Weise definiert. Um das Produkt einer Strecke a in eine Strecke b zu definieren, bedienen wir uns folgender Konstruktion (Fig. 9): Auf dem einen Schenkel x des rechten Winkels xy tragen wir vom Scheitel O aus die Strecken $Oe = e$, $Ob = b$ ab; sodann tragen wir auf dem anderen Schenkel y die Strecke $Oa' = a$ ab. Wir verbinden die Punkte e und a' durch eine Gerade und ziehen zu dieser Geraden durch den Punkt b eine Parallele. Die hierdurch auf y abgeschnittene Strecke $Oc = c$ soll als Produkt ab bezeichnet werden. Die bei der Konstruktion benutzten Operationen sind alle eindeutig, und das Produkt ist infolgedessen eindeutig definiert.

Der besondere Fall, wo die Strecke 0 wird, d. h. auf einen Punkt reduziert wird, soll auch in Betracht gezogen werden. Es ist stets $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$. Es kann aber vorkommen, dass $a \cdot b = 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, nämlich in dem Falle, wo c nach O fällt. Das wird bedeuten, dass die beiden Geraden x und ea' Schmieggeraden sind, und dass ihr Schnittelement eine Strecke gleich b enthält, also dass die Strecken a, b in reziproken Strichen enthalten sind. Also:

Der Fall $ab = 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, trifft ein dann und nur dann, wenn a, b in reziproken Elementen enthalten sind.

38. Um das Produkt ba im allgemeinen Falle zu bestimmen, tragen wir $Oa = a$ auf x, $Ob' = b$ auf y ab, verbinden die Punkte e und b' durch eine Gerade und ziehen zu dieser Geraden durch den Punkt a eine Parallele, welche dann die gesuchte Strecke c' auf y abschneidet.

Es soll nun bewiesen werden, dass $c' = c$, oder $ba = ab$ ist. Zu dem Zwecke ziehen wir durch O die Normalen p, q der Geraden ea', eb', sowie die Spiegelungsachse r der Halbgeraden x, y. Sodann betrachten wir die Halbdrehung (xp) um O, welche x in p überführt, und die inverse Halbdrehung $(\overline{py})$, welche p in y überführt; ferner die Halbdrehung (yr) und die inverse Halbdrehung $(\overline{rx})$, die Halbdrehung xq und die inverse Halbdrehung $(\overline{qy})$. Werden nun diese 6 Transformationen in der genannten Reihenfolge nach einander ausgeführt, entsteht eine Transformation

$$\text{(I)} \quad (xp)\,(\overline{py})\,(yr)\,(\overline{rx})\,(xq)\,(\overline{qy}),$$

welche den Punkt e in den Punkt c' überführt.

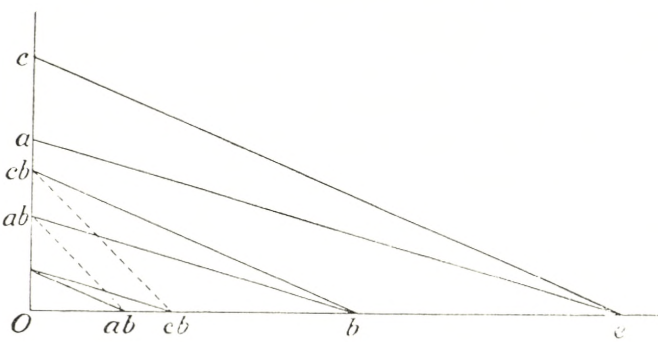

Fig. 10.

In ähnlicher Weise ergibt sich, dass die Transformation

$$\text{(II)} \quad (xq)\,(\overline{qy})\,(yr)\,(\overline{rx})\,(xp)\,(\overline{py})$$

den Punkt e in den Punkt c überführt.

Nun sind aber die beiden Transformationen (I) und (II) nach

Einl. I, 55—56 gleichbedeutend, und hieraus folgt dann $c' = c$, oder $ba = ab$, womit wir das kommutative Gesetz für die oben definierte Multiplikation bewiesen haben.

39. Das assoziative Gesetz wird ebenso leicht nachgewiesen. Man braucht nur die Konstruktionen der Produkte ab und cb auszuführen (Fig. 10), um durch eine ähnliche Schluss-

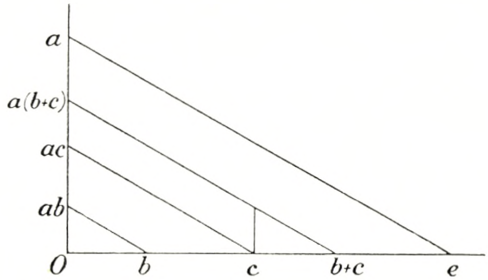

Fig. 11.

weise wie oben einzusehen, dass $c(ab) = a(cb)$ ist, und daraus folgt mit Zuhilfenahme des kommutativen Gesetzes:

$$(ab)\,c = a\,(bc).$$

40. Endlich gilt auch das distributive Gesetz

$$a\,(b + c) = ab + ac,$$

was unmittelbar aus der nebenstehenden Hilbert'schen Figur (Fig. 11) hervorgeht.

41. Die Division $a : b = \frac{a}{b}$ ist immer möglich und eindeutig, wenn der Divisor b ordinär ist. Ist a ordinär und b singulär, ist die Division unmöglich. Sind beide Strecken a, b singulär, ist die Division nur dann möglich, wenn $a \overset{\sim}{\prec} b$; der Quotient wird in diesem Falle unbestimmt. Ist nämlich $a = cb$, so ist auch $a = c_1 b$, wenn

$$(c_1 - c)\,b = 0,$$

d. h. wenn

$$c_1 = c + b^*,$$

wo b^* dem zu b reziproken Strich angehört.

42. Zwei Dreiecke sollen ähnlich heissen, wenn entsprechende Winkel in ihnen kongruent sind.

Es seien Oab und Oa_1b_1 zwei ähnliche rechtwinklige Dreiecke (Fig. 12), welche durch zwei Parallelen g, g_1 aus dem rechten Winkel xy ausgeschnitten sind. Die Buchstaben a, b, a_1, b_1 sollen sowohl die Ecken wie auch die anstossenden Katheten bezeichnen. Wir setzen voraus, dass die Winkel bei a und a_1 ordinär sind. Auf x tragen wir die Einheitsstrecke $Oe = e$ ab, und durch den Punkt e ziehen wir zu g, g_1 eine Parallele, welche auf y eine Strecke $Oc = c$ abschneidet. Es folgt dann

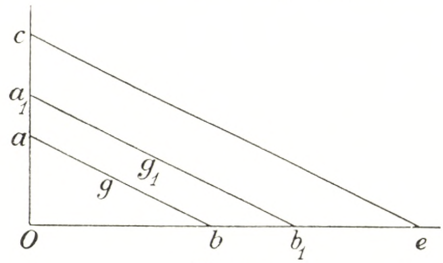

Fig. 12.

$$a = cb, \quad a_1 = cb_1,$$

also

$$ab_1 = a_1b.$$

Indem wir diese Produkte als **Kreuzprodukte** bezeichnen, können wir den folgenden Satz aussprechen:

In zwei ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken sind die beiden Kreuzprodukte der Katheten einander gleich.

Aus diesem Satze leiten wir sofort den Höhensatz ab:

Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat der Höhe gleich dem Produkt der beiden Hypotenusenabschnitte.

43. Hierdurch sind wir nunmehr imstande, den allgemeinen **pythagoreischen Lehrsatz** zu beweisen:

Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten a, b und der Hypotenuse c (Fig. 13). Mit Hilfe eines Halbkreises DBE, mit dem Zentrum A und Radius c, lässt sich immer ein rechtwinkliges Dreieck DBE bestimmen, in welchem die Höhe $BC = a$, und die Hypotenusenabschnitte $DC = c - b$, $CE = c + b$ sind, und dem vorigen Satz zufolge gilt dann

$$a^2 = c^2 - b^2,$$

oder

$$a^2 + b^2 = c^2$$

44. Zu unserem bisherigen System von Strecken fügen wir jetzt in bekannter Weise ein entsprechendes System von negativen Strecken hinzu. Das so erweiterte System der positiven und negativen Strecken sowie der Strecke 0 gestattet dann unbeschränkt die Grund-Operationen: Addition, Subtraktion und

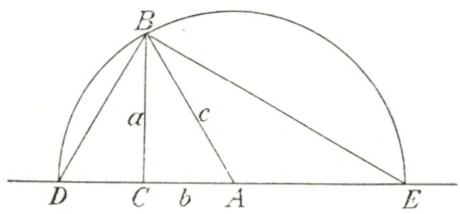

Fig. 13.

Multiplikation unter Erhaltung aller Ringpostulaten, d. h. das ganze System bildet einen Ring. In diesem Ringe sind alle singuläre Strecken Nullteiler. Zwei zu einander reziproke Strecken haben das Produkt 0.

Was die Ordnungsbeziehungen anbetrifft gilt die folgende Grundregel: aus $a > 0$, $b > 0$ folgt $ab \geqq 0$.

Es liegt nun auf der Hand, wie man ein rechtwinkliges Koordinatensystem einrichten kann, in welchem jeder Punkt durch zwei Strecken x, y als Koordinaten bestimmt wird, jede Gerade durch eine lineare Gleichung

$$ax + by + c = 0,$$

in den laufenden Koordinaten x, y, wobei nicht beide Strecken a, b Nullteiler sind, und jeder Kreis durch eine Gleichung folgender Form:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \neq 0,$$

dargestellt wird.

45. Zu unserer so definierten Koordinatenebene können wir schliesslich Vektoren einführen:

Jedem Vektor $a = (a_1, a_2)$ mit den Koordinaten a_1, a_2 entspricht der Quervektor $\hat{a} = (-a_2, a_1)$. Das Produkt ab zweier Vektoren $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ wird so definiert:

$$ab = a_1 b_1 + a_2 b_2 .$$

Das Quadrat $aa = a^2$ des Vektors a ist demnach

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 ,$$

mit anderen Worten, dem pythagoreischen Lehrsatz zufolge:

Das Quadrat des Vektors ist gleich dem Quadrat der entsprechenden Strecke.

Der Vektor soll ordinär oder singulär heissen, je nachdem die entsprechende Strecke ordinär oder singulär ist. Die Geraden werden durch Einheitsvektoren orientiert. Seien zwei Geraden durch die Einheitsvektoren a, b orientiert, so sollen cos und sin ihres Winkels (a, b) so definiert werden:

$$\cos(a, b) = ab, \quad \sin(a, b) = \hat{a}\, b.$$

Auf Grund dieser Definitionen sind für jedes ordinäre Dreieck (d. h. ein Dreieck mit ordinären Seiten und Winkeln) die aus der traditionellen ebenen Trigonometrie bekannten Formeln ohne Schwierigkeit ableitbar.

Auch erkennen wir, dass jeder Schnittpunktsatz, der in der gewöhnlichen projektiven Geometrie gilt, ebenfalls in der hier vorgetragenen Geometrie Gültigkeit hat, unter dem Vorbehalt, dass alle in Rede stehenden Verbindungsgeraden und alle Schnittpunkte eindeutig bestimmt sind.

46. Um die Tragweite unserer Untersuchung einen Schritt weiter zu führen, betrachten wir noch den Fall, wo keine ordinären Strecken vorhanden sind, wobei stets die Voraussetzung gemacht werden soll, dass Rechtecke mit beliebig grossen Seiten existieren.

In diesem Falle wählen wir eine beliebig grosse Strecke a heraus und beschränken unsere Untersuchung auf den durch a definierten Eudoxischen Bereich $E(a)$. Die Geometrie dieses Bereichs gestaltet sich nun genau wie im vorhergehenden Falle, indem wir unter Geraden in $E(a)$ die Durchschnitte der ursprünglichen Geraden mit $E(a)$ verstehen.

In ganz ähnlicher Weise lässt sich die Geometrie eines beliebigen Flecks der singulären Ebene und die Geometrie eines Unter- oder Pariflecks der schwach singulären oder der ordinären Ebene behandeln.

47. Schliesslich erwähnen wir noch die räumliche singuläre Geometrie. Das Produkt ab zweier Vektoren $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$ ist

$$ab = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 .$$

Das Quadrat $aa = a^2$ des Vektors a ist

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 ,$$

also wiederum, dem pythagoreischen Lehrsatz zufolge:

Das Quadrat des Vektors ist gleich dem Quadrat der entsprechenden Strecke.

Sind die beiden Vektoren a, b senkrecht zueinander, so gilt, wegen des pythagoreischen Lehrsatzes:

$$a^2 + b^2 = (a - b)^2,$$

d. h.

$$ab = 0,$$

und für den Fall, wo a und b ordinär sind, gilt umgekehrt, dass $ab = 0$ eine hinreichende Bedingung dafür ist, dass $a \perp b$.

Wie in der Ebene werden die Geraden durch Einheitsvektoren orientiert.

Der Quervektor $\widehat{ab}$ (das vektorielle Produkt) zweier Vektoren a, b wird so definiert:

$$\widehat{ab} = (a_2 b_3 - a_3 b_2 ,\ a_3 b_1 - a_1 b_3 ,\ a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

wonach

$$\widehat{ab} \cdot c = \begin{vmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \\ c_1 c_2 c_3 \end{vmatrix} = \widehat{abc}.$$

Durch einfache Rechnung bestätigt man die folgende Identität:

$$(\widehat{ab})^2 = a^2 b^2 - (ab)^2.$$

Sind a, b zwei zueinander senkrechte Einheitsvektoren, so folgt hieraus, dass $\widehat{ab} = c$ auch ein Einheitsvektor ist senkrecht zu den beiden anderen. Ein zweiter Einheitsvektor senkrecht zu a und b ist $c' = -c$. Für c und c' gelten die Gleichungen

$$\widehat{abc} = 1, \quad \widehat{abc'} = -1.$$

Für die drei Grundvektoren $i = (1,0,0), j = (0,1,0), k = (0,0,1)$ erhalten wir:

$$\widehat{ij} = k, \quad \widehat{jk} = i, \quad \widehat{ki} = j, \quad \widehat{ijk} = 1.$$

Ein Transport um den Nullpunkt (0,0,0) als Fixpunkt wird dadurch bestimmt, dass die Grundvektoren i, j, k in vorgegebene aufeinander senkrechte Einheitsvektoren a, b, c, übergehen. Der Punkt x geht dabei in den durch die folgende Formel bestimmten Punkt x' über:

$$x' = x_1 a + x_2 b + x_3 c.$$

Der Transport ist direkt oder indirekt, je nachdem $\widehat{abc} = \pm 1$ ist.

Für zwei beliebige Punkte x, y und deren entsprechende Punkte x', y' gilt:

$$x'y' = xy, \quad (x'-y')^2 = (x-y)^2, \quad \widehat{x'y'} = (\widehat{xy})'.$$

Für zwei Einheitsvektoren a, b definieren wir im Raume in unmittelbarem Anschluss an unsere Definitionen in der Ebene:

$$\cos(a, b) = ab, \quad \sin(a, b) = \frac{\widehat{ab}}{\widehat{ef}},$$

wobei e, f zwei auf einander senkrechte Einheitsvektoren der Ebene ab bedeuten. Die Normale dieser Ebene soll durch den Einheitsvektor $\widehat{ef}$ orientiert werden. Dem Winkel (α, β) von einer so orientierten Ebene α zu einer anderen orientierten Ebene β, wobei auch eine Orientierung für die Schnittlinie der beiden Ebenen vorgegeben sein soll, entsprechen dann den obigen Formeln gemäss eindeutig bestimmte Werte des cosinus und sinus.

48. Betrachten wir jetzt eine dreiseitige Ecke, deren Kanten durch die Einheitsvektoren A, B, C orientiert sind, und deren Seitenebenen BC, CA, AB ebenfalls wie oben angegeben orientiert

sind. Folgende Bezeichnungen für Seiten und Raumwinkel werden eingeführt:

$$(B, C) = a, \quad (C, A) = b, \quad (A, B) = c,$$
$$(CA, AB) = A, \quad (AB, BC) = B, \quad (BC, CA) = C.$$

Um die allgemeinen Beziehungen dieser 6 Winkel zu finden, benutzen wir die folgenden Identitäten:

$$\widehat{CA} \cdot \widehat{AB} = \begin{vmatrix} CA & CB \\ A^2 & AB \end{vmatrix},$$

$$\widehat{\widehat{CA}\ \widehat{AB}} = \begin{vmatrix} A & B \\ \widehat{CAA} & \widehat{CAB} \end{vmatrix}.$$

Aus der ersteren folgt direkt:

$$\text{(I)} \quad \cos a = \cos b \, \cos c - \sin b \, \sin c \, \cos A,$$

und aus der anderen ergibt sich

$$\text{(II)} \quad \sin b \, \sin c \, \sin A = \widehat{ABC},$$

und hiermit haben wir für ordinäre sphärische Dreiecke die Gültigkeit der gewöhnlichen Grundformeln nachgewiesen.

Indleveret til Selskabet den 16. August 1945.
Færdig fra Trykkeriet den 7. Januar 1946.